Höhere Mathematik sehen und verstehen,
Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021

Kreis alternativ mit rationalen Béziersplines Version Anregung 5.2 mit N1=(0,1)

Bernsteinpolynome

In[ ]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;

b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t); b[3, t_] := t^3
```

Herleitung einer Parameterdarst. für den Kreis

Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch einen bekannten Punkt schneidet den Kreis.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.

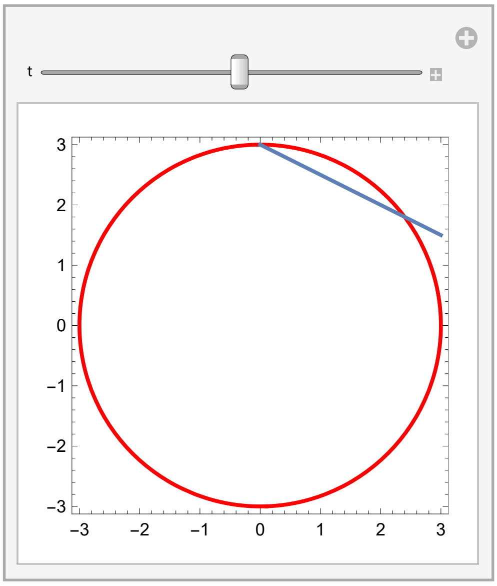
Kreis $x^2 + y^2 == r^2$

In[1]:=
```
kreis =
  ContourPlot[x^2 + y^2 == 9, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
```
Konturgraphik Seitenverhältnis Konturenstil rot

Die diese Stellung der Geraden sorgt für die alternative Parameterdarstellung
die diejenige ist, die im Buch zuerst verwendet wurde und für Anregung 5.2 mit N1=(0,1)

In[2]:=
```
Manipulate[Show[{kreis, Plot[-t x + r /. r → 3, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0},
    Axes → True, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}]}],
 {{t, 0.5}, -10, 10}]
```
manipuliere | zeige an | stelle Funktion graphisch dar | Achsenursprung | Achsen | wahr | Koordinatenbereich der Graphik

Out[2]=



In[∘]:=
```
Solve[{x^2 + y^2 == r^2, y == -t x + r}, {x, y}]
(* diese Rechnung ist in der Lösung im Web durchgeführt*)
```
löse

Out[∘]=

$$\left\{\{x \to 0,\ y \to r\},\ \left\{x \to \frac{2\,r\,t}{1+t^2},\ y \to \frac{r - r\,t^2}{1+t^2}\right\}\right\}$$

Definition rationaler Bézierspline-Basis

In[∘]:=
```
Rw =.
```

In[∘]:=
```
Rw[i_, t_] := (ww[i] × b[i, t]) / (Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}]);
Rw[i, t]
```

Out[∘]=

$$\frac{b[i,t] \times ww[i]}{(1-t)^3\,ww[0] + 3\,(1-t)^2\,t\,ww[1] + 3\,(1-t)\,t^2\,ww[2] + t^3\,ww[3]}$$

Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

$$x[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{r\,(1-t^2)}{(1+t^2)};\ (*\text{Kreis, Parameterdarst, wie in Buch}*)$$

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden

In[ ]:=
```
nenner = Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}]
```
summiere

Out[ ]=

$$(1-t)^3\,ww[0]+3\,(1-t)^2\,t\,ww[1]+3\,(1-t)\,t^2\,ww[2]+t^3\,ww[3]$$

In[ ]:=
```
CoLi = CoefficientList[nenner, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[ ]=

$$\{ww[0],\,-3\,ww[0]+3\,ww[1],\,3\,ww[0]-6\,ww[1]+3\,ww[2],\,-ww[0]+3\,ww[1]-3\,ww[2]+ww[3]\}$$

In[ ]:=
```
Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
```
löse

Out[ ]=

$$\left\{\left\{ww[0]\to 1,\,ww[1]\to 1,\,ww[2]\to \frac{4}{3},\,ww[3]\to 2\right\}\right\}$$

Also sind die Gewichte für den Kreis:

In[ ]:=
$$W=\left\{1,1,\frac{4}{3},2\right\};$$

In[ ]:=
```
w[i_] := W[[i + 1]]
```

In[ ]:=
```
nenner = Sum[w[i] × b[i, t], {i, 0, 3}] // Simplify  (* wie erwartet*)
```
summiere vereinfache

Out[ ]=

$$1+t^2$$

Verwendung der Bernsteinpolynome in der rationalen Version

Verwendung der Gewichte auch im Zähler der rationalen Bézierbasis

In[ ]:=
$$R[i\_,t\_]:=\frac{w[i]\times b[i,t]}{nenner}$$

In[ ]:=
```
{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}
```

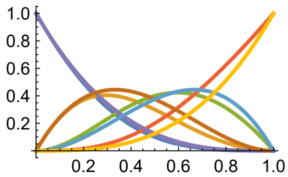
Out[ ]=

$$\left\{\frac{(1-t)^3}{1+t^2},\,\frac{3\,(1-t)^2\,t}{1+t^2},\,\frac{4\,(1-t)\,t^2}{1+t^2},\,\frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$$

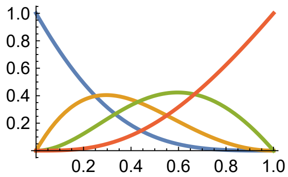
○ Vergleichende Bilder

In[]:=
```
alle =
 Plot[{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t], b[0, t], b[1, t], b[2, t], b[3, t]}, {t, 0, 1}]
 stelle Funktion graphisch dar
nurRat = Plot[{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}, {t, 0, 1}]
         stelle Funktion graphisch dar
```

Out[]=



Out[]=



■ Steuerpunkte für den Kreis

Punkte (Variabel gelassen)

In[]:=
```
P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```

Out[]=

{{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}

● Kreis Parameterdarstellung in dieser Version

In[]:= $x[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{r\,(1-t^2)}{(1+t^2)};$

■ Berechnung der Steuerpunkte

○ Berechnung x-Koordinaten

In[]:=
```
xwerte = Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] // Simplify // Numerator
                                                                   vereinfache    Zähler
```

Out[]=

$-\mathrm{Axx}\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,\mathrm{Bxx}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\mathrm{Cxx} - 2\,\mathrm{Cxx}\,t + \mathrm{Dxx}\,t)\right)$

In[]:=
```
xco = CoefficientList[xwerte, t]
      Liste der Koeffizienten
```

Out[]=

{Axx, −3 Axx + 3 Bxx, 3 Axx − 6 Bxx + 4 Cxx, −Axx + 3 Bxx − 4 Cxx + 2 Dxx}

In[]:=
```
Eq = xco == {0, 2 r, 0 , 0};
```

In[∘]:=
```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[∘]=
$$\left\{\left\{Axx \to 0,\ Bxx \to \frac{2\,r}{3},\ Cxx \to r,\ Dxx \to r\right\}\right\}$$

In[∘]:=
```
Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[∘]=
$$\left\{\left\{Axx \to 0,\ Bxx \to \frac{2\,r}{3},\ Cxx \to r,\ Dxx \to r\right\}\right\}$$

○ Berechnung y-Koordinaten

In[∘]:=
```
ywerte = Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[∘]=
$$-Ayy\,(-1+t)^3 + t\left(3\,Byy\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,Cyy - 2\,Cyy\,t + Dyy\,t)\right)$$

In[∘]:=
```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]=
$$\{Ayy,\ -3\,Ayy + 3\,Byy,\ 3\,Ayy - 6\,Byy + 4\,Cyy,\ -Ayy + 3\,Byy - 4\,Cyy + 2\,Dyy\}$$

In[∘]:=
```
Eqy = yco == {r, 0, -r, 0};
```

In[∘]:=
```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```
löse

Out[∘]=
$$\left\{\left\{Ayy \to r,\ Byy \to r,\ Cyy \to \frac{r}{2},\ Dyy \to 0\right\}\right\}$$

○ Steuerpunkte sind

In[∘]:=
$$\left\{A = \{0, r\},\ B = \left\{\frac{2}{3}\,r,\ r\right\},\ Cc = \left\{r,\ \frac{r}{2}\right\},\ Dd = \{r, 0\}\right\};$$
```
(* C und D sind belegt*)
```
Kons… leite ab

● Parameterdarstellung mit rationalen Béziersplines (Probe, wie erwartet)

In[∘]:=
```
Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] /. solx // Simplify
```
vereinfache

Out[∘]=
$$\left\{\frac{2\,r\,t}{1+t^2}\right\}$$

In[∘]:=
```
Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] /. soly // Simplify
```
vereinfache

Out[∘]=
$$\left\{\frac{r - r\,t^2}{1+t^2}\right\}$$

Das 1. Kreisgerüst im Buch ist richtig

In[ ]:=
```
Viertelkreis = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. r → 3, {t, 0, 1},
    PlotStyle → { RGBColor[0, 0.5, 1], Thickness[0.01]}];
```

In[ ]:=
```
{A, B, Cc, Dd}
```

Out[ ]=

$$\left\{\{0, r\}, \left\{\frac{2r}{3}, r\right\}, \left\{r, \frac{r}{2}\right\}, \{r, 0\}\right\}$$

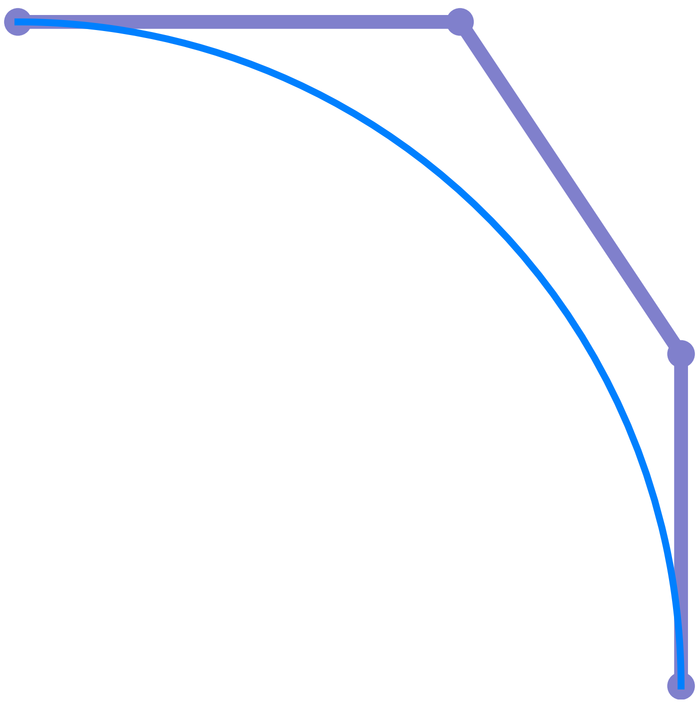
In[ ]:=
```
{{r, 0}, {r, 2r/3}, {r/2, r}, {0, r}} (*C und D darf man nicht nehmen,
da sie spezielle Bedeutungen haben.*)
```

Out[ ]=

$$\left\{\{r, 0\}, \left\{r, \frac{2r}{3}\right\}, \left\{\frac{r}{2}, r\right\}, \{0, r\}\right\}$$

In[ ]:=
```
r = 3;
Show[Graphics[{Thickness[0.02], PointSize[0.04],
    RGBColor[0.5, 0.5, 0.8], Point[{A, B, Cc, Dd}], Line[{A, B, Cc, Dd}]}
 ], Viertelkreis] (* von links oben nach rechts unten*)
r =.
```

Out[ ]=



GeoGebra-Dateien dazu echte-Trisektrix-andererKreis.ggb